⋆ ⋆

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2. Calculer $\mathbb{P}(4X \leq X^2 + 3)$

⋆

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-10; 10]$. Calculer $\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} > 5\right)$.

⋆

Exercice 3

Soient a et b deux réels fixés.

1) Montrer que si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $Y = aX + b$ suit une loi uniforme, on précisera la fonction de densité de Y.
2) Montrer que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y = aX + b$ suit une loi normale que l'on précisera.

⋆

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi $\mathcal{N}(0, 4)$. On pose $Y = |X|$.

1) Justifier que Y est une variable à densité et préciser une densité de Y.
2) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

⋆

Exercice 5

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et λ un réel strictement positif.
On pose $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

1) Calculer $P(V \leq x)$ pour tout réel x.
2) En déduire que V est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de V

⋆

Exercice 6

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $L \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à la variable aléatoire discrète X définie par $X = \left\lceil \dfrac{Y}{L} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier k tel que $x \leq k$ (partie entière supérieure).

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2) Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera les paramètres.
3) Peut on choisir L pour que X et Y ait la même espérance ?

⋆

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.
2) Déterminer F_X la fonction de répartition de X
3) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_X
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
5) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire bien définie. Déterminer la loi suivie par Y.

⋆

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire qui admet f comme densité. Déterminer la fonction de répartition de X.

3) Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Posons $Y = \varphi(X)$.
   a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
   b) Déterminer la fonction de répartition de Y
   c) En déduire la loi suivie par Y.

⋆

Exercice 9

(Loi log-normale) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres (m, σ^2) et soit $X = \mathrm{e}^Y$.

1) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et préciser sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
2) En déduire une densité de X.
3) Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

⋆⋆⋆

Exercice 10

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Calculer

$$I = \int_0^1 \mathbb{E}(\max(x, U))\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x, U)\,\mathrm{d}x\right)$$

⋆⋆⋆

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$

1) Montrer que f est une fonction de densité d'une variable aléatoire X. Cette loi s'appelle **loi logistique standard.**
2) Montrer que X admet une espérance puis déterminer $\mathbb{E}[X]$ sans calcul d'intégrale.
3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$. Déterminer la loi de $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$

⋆⋆⋆

Exercice 12

(d'après BCE 2024) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(2+x)^2} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On suppose que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire Z définie sur Ω.

1) Déterminer la valeur de λ
2) Déterminer la fonction de répartition de Z.
3) On suppose que $Z(\Omega) =]0,1]$ et on pose $Y = Z + \dfrac{1}{Z}$. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur Ω. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y.
4) Déterminer la fonction de répartition de Y.
5) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de Y.

⋆⋆⋆

Exercice 13

Soit c un réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer c tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ est une variable à densité qui suit la même loi que X.

Le coin des Khûbes

⋆⋆⋆

Exercice 14

(d'après HEC 2022) Soit c un réel strictement positif. On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-c^2x} - \mathrm{e}^{-4c^2x}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction densité de probabilité, et on note X une variable aléatoire de densité f.

1) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.
2) On note $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y est une variable à densité et préciser une fonction de densité de Y.
3) Montrer que Y admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

⋆

Exercice 15

(d'après ENS Lyon 2025) *On définit la partie entière supérieure d'un réel x comme l'unique entier noté $\lceil x \rceil$ vérifiant :*

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

Par exemple : $\lceil 1,2 \rceil = 2$, $\lceil 4,7 \rceil = 5$, $\lceil 7 \rceil = 7$.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $Y = \lceil X \rceil$ et $Z = Y - X$.

1) Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, calculer $P((Z \leq t) \cap (Y = k))$.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e} - 1} & \text{si } t \in]0;1[\\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

3) Montrer que Z admet une densité et que la fonction f est une densité de Z.
4) Justifier que Z admet une espérance et la calculer.
5) Justifier que Z admet une variance et la calculer.